

## **ВІДГУК**

офіційного опонента

на дисертацію Райлян Анастасії Андріївни

«Обернена задача знаходження форми графу та узагальнення теореми

Амбарцумяна»,

представлену на здобуття наукового ступеня доктора філософії

з галузі знань 11 «Математика та статистика» за спеціальністю 111

«Математика».

### **Актуальність теми дисертаційного дослідження**

Теорія квантових графів, тобто теорія диференціальних рівнянь, що задані на метричних графах, набула популярності серед математиків та фізиків-теоретиків. Як і в класичній теорії графів тут важливою є обернена задача відновлення форми графу. Але, якщо в класичній теорії графів вихідними даними були власні значення матриці суміжності графа (див. класичну монографію [D. M. Cvetkovic', M. Doob, H. Sachs. Spectra of Graphs. Theory and

Applications. Berlin, 1980. Amsterdam 1988.]), то в теорії квантових графів вихідними даними є власні значення (спектр) задачі, породженої яким небудь диференціальним рівнянням квантової механіки (в даній дисертації це рівняння Шрьодінгера, або інакше - рівняння Штурма-Ліувілля) на метричному графі. При цьому обирають деякі самоспряжені крайові умови та умови з'єднання (в цьому дослідженні це стандартні умови, тобто умови Неймана у всяких вершинах і неперервності та Кірхгофа у внутрішніх вершинах у розділі 4 та стандартні умови у внутрішніх вершинах та умови Діріхле у всяких вершинах у розділі 5).

Актуальність теми пов'язана можливістю застосування результатів роботи у дизайні квантових мікросхем. Також цілком ймовірно застосування результатів роботи пов'язане з тлумаченням таких задач у класичній механіці, так як рівняння Штурма-Ліувілля описує також і малі поперечні

коливання гладкої неоднорідної струни. В цьому випадку метричний граф це сітка зі струн.

### **Степінь обґрунтованості наукових положень та висновків.**

Висока степінь обґрунтованості та достовірності наукових положень, теоретичних висновків та результатів дослідження підтверджується глибиною методологічної, теоретичної бази, її прикладним характером.

Дисертаційна робота складається з анотації українською та англійською мовами; змісту дисертації; п'яти розділів, перший з яких вступ, загальних висновків, списку використаних джерел.

У вступі обґрунтовується актуальність обраної теми, описаний зв'язок з науковими програмами, темами, сформульовано мету і визначено основні методи дослідження, визначено об'єкт і предмет дослідження, наукову новизну роботи і теоретичне значення отриманих результатів, коротко викладено зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи описано актуальність теми, розглянуті всі можливі застосування теорії оберненої задачі знаходження форми графа, також наведені посилання на роботи, опубліковані останнім часом, що містять приклади, так званих, коспектральних (ізоспектральних) графів.

Наведений зв'язок з науковими програмами, в яких приймала участь авторка.

З'ясовані мета, завдання і методи дослідження.

Доведена наукова новизна одержаних результатів.

У другому розділі наведена коротка історія обернених задач Штурма-Ліувілля на інтервалі, яка починається з відомої теореми Амбарцумяна. Далі описана пряма задача про три спектри (яку можна розглядати як задачу на графі  $P_3$ ). Також описане розв'язання оберненої задачі на зірковому графі, в якій шуканими є потенціали на ребрах, а даними є спектр задачі на всьому графі та спектри задач на окремих ребрах.

Далі авторка концентрує свою увагу на обернених задач іншого виду: задачі, в яких шуканою є форма графа, а даним є спектр деякої спектральної задачі на цьому графі.

Дослідження таких обернених задач започатковано у роботах

J. von Below, U. Smilansky та продовжене у роботах P. Exner, P. Kurasov, P. Kuchment, D. Mugnolo, O. Post, G. Berkolaiko та ін.

У третьому розділі розглянуто пряму задачу про взаємне розташування спектрів трьох задач Штурма-Ліувілля, а саме задачі на всьому інтервалі з умовою Неймана на лівому кінці і умовою Діріхле на правому, задачі, породженій тим самим рівнянням Штурма-Ліувілля, на лівій половині інтервалу, з умовами Неймана на обох кінцях цього півінтервалу та задачі, породженій тим самим рівнянням Штурма-Ліувілля на правій половині з умовою Неймана на лівому і умовою Діріхле на правому кінці правого півінтервалу.

Доведено, що власні значення першої з трьох вищеописаних задач чергується у нестрогому сенсі з елементами об'єднання спектрів другої та третьої задачі. Також знайдені асимптотики власних значень цих трьох задач.

В цьому ж розділі розв'язана обернена задача за трьома спектрами, тобто знайдені умови на три послідовності дійсних чисел необхідні та достатні для того щоб ці послідовності були спектрами трьох вищеописаних задач. Доведено єдиність розв'язку цієї оберненої задачі.

Наприкінці цього розділу розглянуто випадок дещо схожий на класичну теорему Амбарцумяна, а саме доведено, що за певних умов відновити потенціал рівняння Штурма-Ліувілля можна, використовуючи спектр задачі на всьому інтервалі, спектр задачі на правому півінтервалі і одне власне значення задачі на лівому півінтервалі.

У четвертому розділі розглянута задача відновлення форми графів, використовуючи спектри задач Штурма-Ліувілля на простих зв'язних рівнобічних графах зі стандартними умовами у вершинах.

При цьому використаний зв'язок між спектрами задач Штурма-Ліувілля на рівнобічних графах і спектрами нормованих лапласіанів відповідних комбінаторних графів.

Використовуючи асимптотику спектрів задач Штурма-Ліувілля, доведено що серед простих зв'язних рівнобічних графів з кількістю вершин, що не перевищує п'яти, немає коспектральних. Для дерев це твердження виявилось вірним, якщо кількість вершин не перевищує восьми.

У п'ятому розділі розглянута задача Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі зі стандартними умовами у внутрішніх вершинах і умовами Діріхле у висячих вершинах. Наведені приклади, коли спектр задачі Штурма-Ліувілля однозначно визначає форму графа, а також приклади, коли не визначає, тобто знайдені коспектральні графи.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

На мій погляд, усі результати, отримані в даній роботі є новими.

Так задача Штурма-Ліувілля з трьома спектрами раніше розглядалась, але з іншими крайовими умовами, які виключали випадок Амбарцумяна.

Єдиність розв'язку оберненої спектральної задачі Штурма-Ліувілля на простих зв'язних рівнобічних графах зі стандартними крайовими умовами у вершинах раніше була відома тільки для випадку графу  $P_2$ , а в дисертаційній роботі це доведено для всіх таких графів з кількістю вершин, яка не перевищує п'яти і для всіх дерев, кількість вершин у яких не перевищує вісім.

### **Повнота викладу результатів дослідження в опублікованих працях**

Основні теоретичні положення та висновки роботи опубліковані автором у п'яти публікаціях, серед яких одна у виданні, що входять до наукометричної бази Scopus (Q1), одна у виданні, що входить до наукометричної бази Scopus (Q2), одна у фаховому виданні України,

переклад якого на англійську мову входить до наукометричної бази Scopus (Q3). Ще дві публікації вийшли в тезах міжнародних конференцій.

Апробація результатів дисертаційного дослідження проводилася на двох наукових міжнародних конференціях та на міжнародному науковому семінарі.

### **Практичне значення результатів дослідження**

Концептуальні пропозиції і висновки дисертації мають науково-теоретичне та практичне значення, та можуть бути використані у науково-дослідній діяльності для подальшого вивчення порушеної проблематики.

Зокрема, результати дисертаційного дослідження можуть бути використані у теорії синтезу електричних ланцюгів, а також становлять інтерес у галузі математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь, теорії квантових графів, а також у дизайні квантових мікросхем.

**Дискусійні питання та зауваження.** Позитивно оцінюючи, в цілому, досягнуті А. А. Райлян теоретичні та практичні результати дослідження, вважаю за необхідне висловити деякі зауваження та побажання:

1. В п'ятому розділі наведені лише приклади, в яких обернена задача відновлення форми графа за спектром задачі Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі зі стандартними умовами у внутрішніх вершинах і умовами Діріхле у висячих вершинах має єдиний розв'язок і приклади, коли розв'язок цієї оберненої задачі не є єдиним. Загальна теорія не побудована, як це було зроблено у розділ 4 для задачі з умовами Неймана на висячих вершинах.
2. Дисертаційна робота є дотичною до досліджень деяких авторів і, тому вимагає акуратного співставлення і порівняння отриманих авторкою результатів з результатами досліджень інших авторів. Попри великий список літератури з 91 позиції, не для всіх основних результатів наведено акуратне і предметне порівняння результатів з недавніми результатами інших авторів.

3. Описки. В дисертаційній роботі є ряд стилістичних і граматичних помилок, зустрічається неправильне вживання відмінків. Проте з контексту завжди зрозуміло про що йдеться і зміст не спотворюється. Тому не наводимо список цих неточностей.

### **Загальний висновок.**

Дисертаційна робота на тему «Обернена задача знаходження форми графу та узагальнення теореми Амбарцумяна», є цільним, завершеним, самостійним науковим дослідженням, що виконане на належному теоретичному рівні. Структура та обсяг дисертації відповідає встановленим вимогам. Зміст дисертації відповідає поставленій меті і завданням, які повністю вирішено в процесі дослідження. Основні положення роботи, винесені на захист, мають елементи наукової новизни. Авторка виявила високий рівень аналізу літератури з проблеми дослідження. У тексті не виявлено ознак плагіату, самоплагіату, фальсифікації.

Дисертаційна робота А. А. Райлян відповідає чинним вимогам п. п. 6, 7, 8, 11 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженому Постановою Кабінету Міністрів України від 14 січня 2022 року № 44, а її автор А. А. Райлян заслуговує на присудження ступеня доктора філософії зі спеціальності 111 «Математика».

### **Офіційний опонент**

доктор фізико-математичних наук,  
Завідувач лабораторії диференціальних  
рівнянь з частинними похідними,  
Інститут математики НАН України

\_\_\_\_\_ Володимир МИХАЙЛЕЦЬ